UNIVERSITE HASSAN II DE CASABLANCA

FACULTE DES SCIENCES JURIDIQUES ECONOMIQUES ET SOCIALES CASABLANCA

Année Universitaire 2019-2020

CALCUL DES PROBABILITES Série 3

Exercice : 1

Etablir que pour deux événements aléatoires quelconques A et B

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(A \cap \overline{B})$$

Exercice : 2

Soit A et B deux événements tels que $\mathbf{P}(A)=0.4$ et $\mathbf{P}(B)=0.5$.
Trouver les valeurs maximales et minimales que peuvent prendre $\mathbf{P}(A \cap B)$ et $\mathbf{P}(A \cup B)$.

Exercice : 3

Soit A et B deux événements aléatoires avec tels que $\mathbf{P}(A)=0.5$ et $\mathbf{P}(B)=0.5$.
Déterminer $\mathbf{P}(A \cup B)$ lorsque :
a- A et B sont incompatibles,
b- $\mathbf{P}(A \cap B) = 0.5$

Exercice : 4

Soient tA et B deux événements définis sur le même espace fondamental et tels que $P(A) = 2/3$ et $P(B) = 1/2$.
a-Les événements A et B peuvent-ils être incompatibles ?
b-L'un des deux événements peut-il impliquer l'autre ? Si oui, lequel ?

Exercice : 5

Soient A, B, C des événements définis sur le même espace fondamental.
On considère les deux événements

$$D_1 = A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) \quad , \quad D_2 = A \cap (B \cap C)$$

Sachant que $\mathbf{P}(D_1) = 0.2$ et $\mathbf{P}(D_2) = 0.4$ trouver
a- $\mathbf{P}(D_1 \cap D_2)$
b- $\mathbf{P}(\overline{D_1} \cap \overline{D_2})$

Exercice : 6

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\boldsymbol{\Omega} = \{ \omega_1 , \ldots.. , \omega_n \}$ un ensemble fondamental attaché à expérience.
Construire une probabilité $\mathbf{P}$ sur $\boldsymbol{\Omega}$ qui vérifie : $\forall\, i \in [1, n]$, $P(\{\omega_i\}) = C \times i$
où C est une constante réelle à déterminer.

Exercice : 7

Soit A, B et C trois événements indépendants. Prouver que
a-A et $\overline{B}$ sont indépendants.
b- $(A \cap \overline{B})$ et C sont indépendants.

Exercice : 8

Soit $\boldsymbol{\Omega} = \{ \omega_1 , \omega_2 , \omega_3 , \omega_4 \}$ un ensemble fondamental attaché à expérience et $\mathbf{P}$ une probabilité sur $\boldsymbol{\Omega}$..

a- Sachant que $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = 0.25$ et que $P(\{\omega_3\}) = 3\,P(\{\omega_4\})$, donner $P(\{\omega_3\})$ et $P(\{\omega_4\})$.
b- Sachant que $P(\{\omega_1, \omega_3\}) = 0.2$, que $P(\{\omega_2, \omega_3\}) = 0.6$ et que $P(\{\omega_1\}) = 0.2$, calculer $P(\{\omega_4\})$.

Exercice : 9

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$
On suppose que :
$P(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}) = 0.9$, $P(\{\omega_1, \omega_2\}) = P(\{\omega_1, \omega_3\}) = 0.7$.
Déterminer les valeurs de $P(\{\omega_1\})$, $P(\{\omega_2\})$, $P(\{\omega_3\})$ et $P(\{\omega_4\})$.

Exercice : 10

On lance une pièce de monnaie non truqué deux fois de suite. Une éventualité est un couple formé des deux lancés : pile (noté p) ou face (noté f). Soit A l'événement « on obtient deux résultats » et B « on a obtenu pile au premier lancé ». Décrire les événements A, B, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cap B$, $A \cup B$ et calculer leur probanilité.

Exercice : 11

Une urne contient 10 boules parmi lesquelles 3 sont rouges, 4 sont jaunes, 1 est bleue et 2 sont blanches. Les boules rouges, jaunes, bleues et blanches sont marquées de 2, 5, 10 et 20 points respectivement. Trouver la probabilité qu'en tirant 2 boules sans remise, on obtienne
a- sept points.
b- au moins 7 points.
c- une boule ayant plus de 10 points et une boule ayant moins de 10 points.

Exercice : 12

Dix boules numérotées de 1 à 10 sont alignées au hasard une après l'autre. Trouver la probabilité que la boule numérotée 5 apparaisse après la boule numérotée 4.

Exercice : 13

On lance n fois deux dés. Trouver la probabilité que le double six apparaisse au moins une fois.

Exercice : 14

On extrait au hasard une boule d'une urne contenant α boules blanches et β boules noires. Trouver la probabilité que la boule extraite soit blanche ; la probabilité que la boule extraite soit noire.

Exercice : 15

Une urne contient 6 boules blanches et 8 boules noires. On extrait une boule qu'on met de coté. Par la suite on extrait une seconde boule.

a-Sachant que la première boule pigée est blanche, trouver la probabilité que la deuxième boule pigée soit également blanche et la probabilité que la deuxième boule pigée soit noire.
b- Sans connaître la couleur de la première boule extraite, trouver la probabilité que la deuxième boule extraite soit blanche et la probabilité que la deuxième boule extraite soit noire.

Exercice : 16
On choisit au hasard une carte d'une série de 18 cartes numérotées de 1 à 18.
Quelle est la probabilité que le numéro soit un multiple de 3 ou de 7 ?

Exercice : 17
Une boite contient huit boules rouges, trois blanches et neuf bleues. Si on tire au hasard et sans les replacer trois de ces boules, quelle est la probabilité pour que l'on ait :
a-trois boules rouges
b-trois blanches
c-deux rouges et une blanche
d-au moins une blanche
e-une rouge, une blanche et une bleue

Exercice : 18
On jette trois dés non pipés. Calculer la probabilité d'avoir
a-au moins un six
b-un six exactement
c-au moins deux faces identiques
d-la somme des points paire

Exercice : 19
On considère des dés non pipés. Est-il plus probable d'obtenir au moins une fois un six en jetant un dé ou d'obtenir au moins une fois le double six en jetant 24 fois deux dés ?

Exercice : 20
Soit $0 < \mathbf{P}(\mathrm{A}) < 1$. Montrer que les événements A et B sont indépendants si et seulement si

$$\mathbf{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = \mathbf{P}(\mathrm{B}|\overline{\mathrm{A}})$$

Exercice : 21
Soit $\mathbf{P}(\mathrm{A}) = 0.30$; $\mathbf{P}(\mathrm{B}) = 0.4$; $\mathbf{P}(\mathrm{A} \cap B) = 0.15$. Trouver
$\mathbf{P}(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}})$; $\mathbf{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B})$; $\mathbf{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B})$; $\mathbf{P}(\mathrm{A}|\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$; $\mathbf{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$; $\mathbf{P}(\mathrm{B}|\overline{\mathrm{A}})$; $\mathbf{P}(\overline{\mathrm{A}}|\mathrm{B})$; $\mathbf{P}(\overline{\mathrm{B}}|\mathrm{B})$

Exercice : 22

Soit $P(A) = 0.25$; $P(B) = 0.30$; $\mathbf{P}(A \cap B) = 0.10$. Calculer
$\mathbf{P}(A \cap B \mid B)$; $\mathbf{P}(A \cap B \mid A \cup B)$; $\mathbf{P}((\overline{A \cup B})|B)$

Exercice : 23

Soit A et B deux événements définis sur le même ensemble fondamental et tels que $P(A) = 0.5$ et $\mathbf{P}(A \cup B) = 0.7$. Trouver P(B), quand
a-les événements A et B sont incompatibles
b-les événements A et B sont indépendants
c-$P(B|A)$ 0.5

Exercice : 24

Trois canons tirent simultanément sur une cible. Les probabilités d'atteindre la cible sont $p_1 = 0, 6$, $p_2 = 0, 8$, $p_3 = 0, 7$, pour les trois canons respectivement. Trouver la probabilité que la cible soit atteinte au moins une fois.

Exercice : 25

Un lot de 100 pièces de machines est soumis à un contrôle de la qualité. En testant 5 pièces du lot, on rejette le lot si l'on trouve au moins une pièce défectueuse. Trouver la probabilité que le lot soit rejeté, s'il contient effectivement 5% de pièces défectueuses.

Exercice : 26

Deux tireurs visent simultanément une cible. La probabilité d'atteindre la cible est $p_1 = 0, 7$ pour le premier tireur et $p_2 = 0, 6$ pour le second tireur. Trouver la probabilité que le premier tireur atteigne la cible et que le second ne l'atteigne pas.

Exercice : 27

Un étudiant a trois disques colorés des deux côtés de la façon suivante :
-un disque a les deux cotés blancs,
-un disque a un côté blanc et l'autre noir,
-un disque a les deux cotés noirs.
On choisit au hasard un disque et on constate qu'un coté est blanc. Trouver la probabilité que le second coté soit également blanche.

Exercice : 28

Sachant que $\mathbf{P}(A|B) = 0.4$; $\mathbf{P}(A \mid \overline{B}) = 0.1$ et $\mathbf{P}(B|A) = 0.6$ trouver $\mathbf{P}(A)$ et $\mathbf{P}(B)$.

Exercice : 29

Sachant que la probabilité qu'un étudiant soit diplômé est de 0,4, calculer pour un groupe de cinq étudiants, la probabilité
a-qu'aucun étudiant ne soit diplômé.
b-qu'un seul étudiant soit diplômé.

c-que deux étudiants soient diplômés.
d-qu'au moins deux étudiants soient diplômés.
e-que les cinq étudiants soient diplômés.

Exercice : 30

Trois tireurs tirent simultanément sur la même cible. Les probabilités respectives que chaque tireur touche la cible sont $p_1 = 0,4$, $p_2 = 0,5$ et $p_3 = 0,7$. Trouver la probabilité que la cible soit touchée exactement une fois.

Exercice : 31

Une urne contient 6 boules blanches et 8 boules noires. On extrait une boule qu'on met de coté. Par la suite on extrait une seconde boule.
a- Sachant que la première boule pigée est blanche, trouver la probabilité que la deuxième boule pigée soit également blanche et la probabilité que la deuxième boule pigée soit noire.
b- Sans connaître la couleur de la première boule extraite, trouver la probabilité que la deuxième boule extraite soit blanche et la probabilité que la deuxième boule extraite soit noire.

Exercice : 32

Les clients d'une entreprise ont été répartis en plusieurs catégories en fonction du volume d'affaires annuel traité avec eux et en fonction du fait que l'on déjà eu pour eux ou non des créances impayées. Les résultats de décompte sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Volume d'affaire annuel	0 à 10000 (C_1)	10000 à 100000 (C_2)	+ à 100000 (C_3)
Client ayant déjà eu des impayés(I)	100	25	10
Client n'ayant jamais eu d'impayés($\bar{I}$)	1200	350	150

Déterminer pour client choisi au hasard les probabilités suivantes :
$P(C_1)$; $P(C_2)$; $P(C_3)$;
$P(I|C_1)$; $P(I|C_2)$; $P(I|C_3)$;
$P(C_1|I)$; $P(C_2|I)$; $P(C_3|I)$.
Y a-t-il dépendant entre le volume d'affaires et l'existence d'impayés ?

Exercice : 33(facultatif)

Un industriel fabrique des tablettes de chocolats. Pour promouvoir la vente de ces tablettes, il décide d'offrir des places de cinéma dans la moitié des tablettes mises en vente. Parmi les tablettes, 60% permettent de gagner exactement une place de cinéma 40% exactement deux places de cinéma.
On pose $\mathbf{P}(A|B)$ la probabilité conditionnelle de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé.

1- Un client achète une bande de chocolat. On considère les événements suivants :

G = « le client achète une tablette gagnante »
U = « le client gagne exactement une place de cinéma »
D = « le client gagne exactement deux place des cinéma »
a- Donner $\mathbf{P}(G)$, $\mathbf{P}(U|G)$, $\mathbf{P}(D|G)$
b- Montrer que la probabilité de gagner exactement une place de cinéma est égale à 0.3.

2-Un autre client achète deux jours de suite une tablette de chocolat.
a- Déterminer la probabilité qu'il ne gagne aucune place de cinéma.
b- Déterminer la probabilité qu'il gagne au moins une place de cinéma.
Montrer que la probabilité qu'il gagne exactement deux places de cinéma est égale 0.29.

Exercice : 34

Considérons deux urnes U_1U_2 avec les compositions suivantes :

Urnes	Nombre de boules blanches	Nombre de boules noires
U_1	a	b
U_2	c	d

On extrait de l'urne U_l une boule et sans connaître sa couleur on l'introduit dans l'urne U_2. Ensuite on extrait une boule de l'urne U_2. Trouver la probabilité que la boule extraite de l'urne U_2 soit blanche.

Exercice : 35

On considère trois urnes d'aspect identique et dont la composition est donnée dans le tableau suivant :

Urnes	Nombre de boules blanches	Nombre de boules noires
U_1	1	1
U_2	5	3
U_3	1	3

On choisit au hasard une urne dont on tire une boule. Trouver la probabilité que la boule extraite soit blanche.

Exercice : 36

On considère deux urnes dont la composition est donnée dans le tableau suivant :

Urnes	Nombre de boules blanches	Nombre de boules noires
U_1	2	1
U_2	1	5

On pige une boule de l'urne U_l et on l'introduit dans l'urne U_2. On extrait ensuite une boule de l'urne U_2. Sachant que la boule tirée de l'urne U_2 est blanche, trouver la probabilité que la boule transférée était noire.

Exercice : 37

Soit deux machines M_l et M_2 produisant respectivement 100 et 200 objets. La machine M_l produit 5% d'objets défectueux, la machine M_2 en produit 6%. On tire un objet parmi les 300 objets fabriqués et il est défectueux. Quelle est la probabilité pour qu'il ait été fabriqué par la machine M_1?